一般位相と解析学　講義報告　第３回 *

数学工房 †

2008 年 6 月 15 日 14:00-16:30

概要

まず前半では開集合系で定義された位相空間 X の点の位相的な分類を与えた．次にこれを近傍のことばで条件付けた．後半では 2 つの位相空間の間の連続写像を定義した．さらに連続写像の合成は連続であることを示し，位相同型の定義を与えた．

1　点の位相的分類

定義 1.1 (点の位相的分類)**.** $(X,\ \mathfrak{O})$ を位相空間とする．$M \subset 2^X$ すなわち M を X の部分集合とする．M と $x \in X$ の関係は以下のように分類される．

内点　$x \in X$ が M の内点であるとは $x \in M^i$ を満たすことである

触点　$x \in X$ が M の触点であるとは $x \in M^a$ を満たすことである

境界点　$x \in X$ が M の境界点であるとは $x \in M^f$ を満たすことである

外点　$x \in X$ が M の外点であるとは $x \in M^e = (M^c)^i$ を満たすことである

集積点　$x \in X$ が M の集積点であるとは $x \in (M \setminus \{x\})^a$ を満たすことである

孤立点　$x \in X$ が M の孤立点であるとは $x \in M$ かつ x が集積点でないことである．

上記の点の分類は近傍によっても条件付けることができる．次の命題にそれを示す．

命題 1.1 (点の近傍による特徴づけ)**.**

1° x が M の内点である必要十分条件は，$M \in \mathfrak{V}(x)$ となることである

2° x が M の触点である必要十分条件は，任意の $V \in \mathfrak{V}(x)$ に対して $V \cap M \neq \emptyset$ となることである

3° x が M の境界点である必要十分条件は，任意の $V \in \mathfrak{V}(X)$ に対して $V \cap M \neq \emptyset,\ V \cap M^c \neq \emptyset$ となることである

4° x が M の外点である必要十分条件は，$M^c \in \mathfrak{V}(x)$ となることである

5° x が M の集積点である必要十分条件は，任意の $V \in \mathfrak{V}(x)$ に対して $M \cap V \setminus \{x\} \neq 0$

6° x が M の孤立点である必要十分条件は，$V \cap M = \{x\}$ が成立するような $V \in \mathfrak{V}(x)$ が存在することである

演習 1.1. 命題 *1.1* を示せ．2°の触点の証明には，対偶を使うとよい．

---

* Reported by H.T

† `http://www.sugakukobo.com`

2　連続写像

定義 2.1 (連続写像)**.** 位相空間 $(X,\ \mathfrak{O}(X))$, $(Y,\ \mathfrak{O}(Y))$ が与えられている．$f \in \mathrm{Map}(X,\ Y)$ が連続であるとは

$$f^{-1}(U) \in \mathfrak{V}(x),\ \forall U \in \mathfrak{V}(f(x)) \tag{1}$$

となることである．

これは $f(x)$ の近傍の原像を使った定義である．次の命題に示すように，x の近傍の像を使った定義も可能である．

命題 2.1. 定義 *2.1* に示した f の連続の必要十分条件は，x の近傍の像を使うと次のようになる．

$$\forall U \in \mathfrak{V}(f(x)),\ \exists V \in \mathfrak{V}(x) \ \ \text{s.t. } f(V) \subset U \tag{2}$$

演習 2.1. 命題 *2.1* を示せ．これには式 *(1)* と式 *(2)* の同値性を示せばよい．

連続性は開集合，閉集合を使って定義することもできる．

命題 2.2. 次の *3* つは同値である．

1° f は X 上連続である
2° 任意の $U \in \mathfrak{O}(Y)$ に対して $f^{-1}(U) \in \mathfrak{O}(X)$ である
3° 任意の $A \in \mathfrak{A}(Y)$ に対して $f^{-1}(A) \in \mathfrak{A}(X)$ である

演習 2.2. 命題 *2.2* を示せ．

合成写像については次の定理が成り立つ．

命題 2.3 (連続写像の合成律)**.** *3* つの位相空間 $(X,\ \mathfrak{O}(X))$，$(Y,\ \mathfrak{O}(X))$，$(Z,\ \mathfrak{O}(Z))$ と，これらの間の写像が次のように与えられているとする．

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$f,\ g$ が連続ならば $g \circ f$ は連続である．

演習 2.3. 命題 *2.3* を示せ．これを証明するには次の「合成の原像」の補題を示しておくと便利である．補題 *2.4* をまず示せ．

補題 2.4 (合成の原像)**.** $f,\ g$ を命題 *2.3* で与えられた写像とする．Z の任意の部分集合 $E \in 2^Z$ に対して次が成り立つ．

$$(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}\left(g^{-1}(E)\right)$$

定義 2.2 (位相同型・同相)**.** 位相空間 $(X,\ \mathfrak{O}(X))$，$(Y,\ \mathfrak{O}(Y))$ に対して写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

が位相同型であるとは下記の通りである．

1° f が連続である

2° 連続写像 $g : Y \longrightarrow X$ が存在して $g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ が成立する

またこのとき集合 X, Y は同相であるという．すなわち集合 X, Y が同相である必要十分条件は位相同型の写像 $f : X \longrightarrow Y$ が存在することである．X と Y が同相であることを $X \sim Y$ と書く．

（注意）．連続写像という条件だけでは開近傍が開近傍に写るとは限らないことに注意せよ．例えば最大値を持つ関数 $f(x)$ では，最大値を与える x の近傍は $f(x)$ の近傍には写らない．

系 **2.5.** 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が位相同型である必要十分条件は f が全単射でかつ f と f の逆写像 f^{-1} が連続であることである．

命題 **2.6** (同相の同値関係性)**.** 同相は同値関係である．すなわち

1° $X \sim X$
2° $X \sim Y$ ならば $Y \sim X$ である
3° $X \sim Y$ かつ $Y \sim Z$ ならば $X \sim X$ である

演習 **2.4.** 命題 *2.6* を示せ．